Sullivan の辞書,Teichmuller spaces,そして中心予想(複素力学系に関する諸問題)

谷口, 雅彦

数理解析研究所講究録
959巻 1996年 34-41

Sullivan の辞書, Teichmüller spaces, そして中心予想

谷口雅彦 (Masahiko Taniguchi)
京大・理・数学

1 Teichmüller spaces と Sullivan の辞書

$\mathbf{C}$ 上のクライン群の作用と正則函数の反復合成の作用の類似性は古くからしられていたが、Sullivan の no-wandering domain theorem (trans-Ahlfors finiteness theorem) の証明 (1985) 前後から、再び注目をあびることになった。

力学系としてのクライン群 Γ はその作用が穏やかな通常集合 $\Omega=\Omega(\Gamma)$ と作用がカオス的な極限集合 $\Lambda=\Lambda(\Gamma)$ に2分される。その正則函数 f の反復合成の力学系における対応物が、それぞれファトウ集合 $F=F(f)$ とジュリア集合 $J=J(f)$ である。これらの集合の性質をはじめとし、力学系そのものの性質や、その証明における戦略まで、両者の間に見て取れる類似性を意識的に取り出したものが、いわゆるサリヴァンの辞書である。したがってその対照項目には、有理函数が有限生成クライン群に対応しているといった、極めて明確なものから、いまのところ対応関係が非常に漠としてるものまで含まれている。いわば、ダイナミックに変化し続けている「辞書」である。

ここでは、力学系を再び静的な幾何学的対象と捉えることにより得られる Teichmüler 空間論にまつわる項目を話題にする。まずクライン群にたいしては定義より

Proposition 1 (ねじれなしの) クライン群 Γ に対し

$$Teich(\Gamma)=M_1(\Lambda,\Gamma)+Teich(\Omega/\Gamma)$$

であり、Γ が有限生成のときは$Teich(\Gamma)$ の有限次元性などをもちい右辺第2項についての Ahlfors finiteness theorem (AFT)がでる。さらに右辺第1項について Sullivan rigidity theorem (SRT) がなりたつ。一方、Ahlfors area 0 conjecture (AAC) は未解決である。

一方、有理函数 R の場合には

Theorem 2 McMullen-Sullivan's trans-AFT

$$Teich(\hat{\mathbf{C}}, R) = M_1(J, R) + Teich(F^{dis}, R) + Teich(F^{fol}, R)$$

でありすべての項は有限次元である。

となる。第2項は

（吸引鉢、放物鉢 − 特異全軌道の閉包）$/R$

のTeichmüler空間であり、それ以外ないという「trans-AFT」がSullivanの no wandering domain theorem である。

第3項は

（Siegel, Hermann, 超吸引鉢 − 特異全軌道の閉包）$/R$

であり、クライン群のTeichmüler空間には出てこない。一方、「trans-SRT」はいまだに分からない。これがNILF 予想（trans-SRT 予想）であり、我々が中心予想とよぶ問題群の一角である。

Conjecture 剛性予想 (NILF) 有理函数はintegral torus endomorphismでない限りNILFである（すなわち $M_1(\hat{\mathbf{C}}, R) = \{0\}$）。

Remark 「trans-AAC」についてはNowicki-Van Strienの例（Fibonacci maps）より面積0予想（trans-AAC）は一般には成り立たないことが分かった。（しかしNILFの反例にはなっていない。ただしLyubich によれば、その応用としてergodic でない多項式もつくれる。）

2 中心予想

Sullivan の有名な 3 部作の第 2 部はクライン群の安定性についての定理であった。その一つの variant は次のように書ける。

Theorem 3 ねじれなしの有限生成クライン群が擬等角安定ならば幾何学的有限である。

幾何学的有限性は 3 次元双曲多様体での凸核のコンパクト性を介して、有理函数のジュリア集合での分岐軌道の閉包のコンパクト性、すなわち双曲性(hyperbolicity)に変換される。一方、有理函数の安定性については既に Mañé-Sad-Sullivan により次の基本定理 (ODT) が得られていた。

Theorem 4 安定な有理函数は有理函数全体のなかで open dense である。

数々の「orbit relations」の非存在を parabolic elements の非存在と対応させることによりこれら一見無関係な主張は根源的な問を投げ掛けていることに Sullivan は気づいたのであった。すなわち、まずクライン群に対しては

Conjecture 擬等角安定な、parabolic elements を含まない、ねじれなしの有限生成クライン群は有限生成クライン群のなかで open dense である。

この予想の一つの variant が Thurston の「geometrically-finites are dense」予想である。一方有理函数の反復合成については次の予想 (trans-ODT 予想) が生じる。

Conjecture 安定な有理函数は双曲型である。

ここで安定性の解釈には多様性があり、予想はある意味で恣意的である。そこで ODT と合わせて、次の予想が中心的な予想となる。

Conjecture 稠密性予想 (HD) 双曲型有理函数は全体のなかで dense である。

ここで次の定理は特筆に値する。

Theorem 5 一般の有理函数について *NILF* 予想（*trans-SRT* 予想）から *HD* 予想がでる

Proof. まず擬等角安定な有理函数の集合 X は有理函数のなかで open dense で このような集合の元は Siegel, Hermann, parabolic, (pre)preiodic criticals をもたない。すなわち周期成分はattractive のみである。

さらに integral torus endomorphisms 全体も codimention 正より NILF がなりたてば general な X の元にたいし $Teich(\hat{\mathbf{C}}, R) = Teich(F^{dis}, R)$ で attractive periodic が 2k-2 個あることが分かり、とくに hyperbolic である。 ■

さらに２次多項式の場合には NILF 予想、HD 予想はそれぞれ

Conjecture ２次多項式の場合の剛性予想（NILF2） 任意の２次多項式はNILF である。

Conjecture ２次多項式の場合の稠密性予想（HD2） 双曲型２次多項式は２次多項式のなかで dense である。

となるが、複素１次元の特殊性より

Theorem 6 *NILF2 = HD2*

Proof. HD なら Mandelbrot set の内部が hyperbolic であり、そこではジュリア集合の面積０である。もともとこれらは dense より変形空間がそれ以外存在できない。 ■

3 局所連結性予想と繰り込み可能性

２次のときの HD (=NILF) 予想は じつは見掛け上もっと素朴なつぎの予想に含まれる。

Conjecture 局所連結予想（MLC） Mandelbrot set (the connected locus) M は局所連結である。

これは $P_c(z) = z^2 + c$ に対するベトヒャー函数からつくられる単位円板の外部からMの外部へのリーマン写像、具体的には

$$F(z) = z \prod \left(1 + \frac{z}{P_z^n(z)^2}\right)^{2^{-n-1}}$$

の逆写像が境界まで連続にのびるかという等角写像論の基本的な境界値問題と同値である（Caratheodory の定理）。

Theorem 7 [Douady-Hubbard] *MLC*が成立すれば、*HD2*も正しい。

Proof. MLC が成立すれば　つぎの定理より中立周期点を持たない c については組み合わせ的に rigid である。HD2 が成り立たないと Mandelbrot set の内部の成分の点 c_0 で ILF が存在するがその成分の境界は generic に中立周期点を持たない。したがって c_0 と組み合わせ的に同値な境界点 c_1 があるが　仮定より rigid　で c_0 とｑｃ同値である。これは c_1 が Mandelbrot set の内点であることを意味し矛盾を得る。 ■

Theorem 8 [Douady-Hubbard-Yoccoz] M の点 c に対し

1） P_c が中立周期点を持つとき、c で M は局所連結である。

2） P_c が中立周期点を持たないときは、c で M が局所連結と P_c が組み合わせ的に *rigid* は同値である。

Corollary 1 *MLC*が成り立てば　P_c が中立周期点を持たないようなすべての c で P_c は組み合わせ的に *rigid* である。

また、次のようにも言える。

Corollary 2 組み合わせ的に *rigid* な M の点が *dense* ならば、*HD2* は正しい。

ここで中立周期点を持たない $P = P_c$ が組み合わせ的に rigid とは、他の同様の $Q \in M$ に対して有理的 lamination pattern が一致すれば、ジュリア集合上のみに台をもつｑｃ写像により共役となることをいう。

Remark このような剛性はクライン群のほうでもまだ分からないことがある。いわゆる　Thurston's ending lamination conjecture はその文脈の予想である。

さらにジュリア集合の複雑さのひとつのあらわれが無限繰り込み可能性である。

Theorem 9 [Yoccoz] M の点 c に対し　P_c が無限繰り込み可能でなければ、*NILF* であり、c で M は局所連結である。

Proof. 簡単のため任意の parabolic cycle は repelling とする。P_c が無限繰り込み可能でないことから J_c が局所連結がわかる（いわゆる Yoccoz puzzle）。 Mandelbrot set とジュリア集合の間の類似性の議論から c で Mandelbrot set も局所連結であることがわかる。MLC なら HD の証明の局所 version として NILF も示せるから主張を得る。 ■

Corollary 3 $c \in M$ で *NILF* でないなら P_c は無限繰り込み可能である。

無限繰り込み可能でないことは、力学系のある種の素直性を意味している。一方、P_c が無限繰り込み可能な M の点 c に対しても、局所連結性が成り立つ場合も多々ある。たとえば Lyubich はそのような非可算集合を与えている。

Proposition 10 [Lyubich-宍倉] $P_c = z^2 + c$ が中立周期点を持たないとき、無限繰り込み可能でなければ、ジュリア集合の面積 0 である。

これは幾何学的素直なクライン群に対する Thurston の面積 0 定理の変換であると思える。

4 関連する話題からの付記

まず参考までに Mandelbrot set とジュリア集合の間の類似性で対応する次の定理をあげる。

Proposition 11 [Yoccoz] M の点 c に対し　P_c が無限繰り込み可能でなく、*Cremer* 点も *Siegel disks* ももたなければ、ジュリア集合は局所連結である。

Proposition 12 [Levin-vanStrien] $P(z) = z^n + c$ で n が偶数 c が実ならジュリア集合は全不連結か局所連結である。

次に実の 2 次多項式の場合には NILF 予想、HD 予想はそれぞれ

Conjecture 実 2 次多項式の場合の剛性予想（NILF2real）　任意の実 2 次多項式は NILF である。

Conjecture 実 2 次多項式の場合の稠密性予想（HD2real）　双曲型実 2 次多項式は実 2 次多項式のなかで dense である。

となるが、今の場合には明らかに HD2real から NILF2real がでる。また HD2real が正しいことを証明したと Światek と Lyubich が主張している。NILF2real については、次の定理もある。

Proposition 13 [McMullen] M の実の点 c に対し　P_c が無限繰り込み可能ならば、*NILF* である。

とくに実軸とまじわる M の内部のすべての成分は双曲型のみからなる。

これは上記の Yoccoz の定理と合わせて NILF2real 予想の肯定的解答である。ただし HD2real を意味しない。

また Mandelbrot vertion の面積 0 予想も未解決のようだが、Hausdorff 次元は 2 である（宍倉の定理）。

最後に１０年前越しの質問を記しておく。

問題　いつジュリア集合は面積正になるか？　そしていつ ergodic components が複数になるか？　その数の評価は？

参考文献

[1] M. Lyubich, Geometry of quadratic polinomials; Moduli, rigidity and local connectivety, preprint.

[2] G. Levin and S. van Strien, Local connectivety of the Julia set of real polynomials, preprint.

[3] R. Mañé, P. Sad, and D. Sullivan, On th dynamics of rational maps, Ann. Sci. Eć. Norm. Sup. **16** (1983), 193-217.

[4] G. Levin and S. van Strien, Local connectivety of the Julia set of real polynomials, preprint.

[5] C. McMullen, Complex dynamics and renormalization, Ann. Math. Studies **135** 1994.

[6] C. McMullen, Frontiers in complex dynamics, Bull. A.M.S. **31** 1994, 155-172.

[7] C. McMullen, Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle, preprint.

[8] C. McMullen and D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III: The Teichmüller spaces of a holomorphic dynamical system, preprint.

[9] S. van Strien and T. Nowicki, Polynomial maps with a Julia set of positive Lebesgue measure: Fibonacci maps, preprint.

[10] J. Milnor, Local connectivity of Julia sets: Expository lectures, preprint.

[11] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solutionof the Fatou-Julia problem on wandering domains, Ann. of MAth. **122** (1985), 401-418.

[12] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics II: Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups, Acta Math. **150** (1985), 243-260.

[13] G. Świantek, Hyperbolicity is dense in the real quadratic family, preprint.